ТРАНСПОРТ

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОЕЗДА И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ЕГО РЕШЕНИЯ

Аблялимов Олег Сергеевич

канд. техн. наук, старший научный сотрудник, и.о. профессора кафедры «Локомотивы и локомотивное хозяйство» Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан, г. Ташкент

E-mail: o.ablyalimov@gmail.com

EQUATION OF TRAIN MOVEMENT AND SOME METHODS OF ITS SOLUTION

Oleg Ablyalimov

Doctor of philosophy, chief worker, acting professor of the chair «Locomotives and locomotive economy» Tashkent state transport university, Uzbekistan, Tashkent

АННОТАЦИЯ

Приводится уравнение движения поезда и анализ существующих численных методов его решения, свидетельствующий о необходимости разработки новых численных методов решения для практической реализации на ЭВМ и в работе специалистов локомотивного комплекса железных дорог.

ABSTRACT

An equation of train motion and an analysis of existing numerical methods for its solution are given, indicating the need to develop new numerical solution methods for practical implementation on a computer and in the work of specialists of the locomotive complex of railways.

Ключевые слова: уравнение, метод, решение, поезд, движение, режим, сопротивление, задача, переменная, шаг, производная, полином, ряд.

Keywords: equation, method, solution, train, motion, mode, resistance, task, variable, step, derivative, polynomial, series.

Перемещение поезда на участке описывается известным [1,4] уравнением движения поезда $\frac{dV}{dt} = \xi u$, $\frac{км}{ч^2}$, которое связывает ускорение поезда $\frac{dV}{dt}$ с равнодействующей силой u, $\frac{Н}{кН}$ $(\frac{кгс}{т})$. Разделив обе части на V получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\xi u}{V} = \frac{\xi \varphi(V)}{V} = \mathfrak{f}(V) \quad (1)$$

где $u = \varphi(V)$ – удельная равнодействующая сила поезда, $\frac{Н}{кН}$ $(\frac{кгс}{т})$.

На основании уравнения (1) решаются все задачи, связанные с расчётами перевозочной работы локомотивов на участках, в связи с чем, точностью решения этого уравнения во многом определяется достоверность значений показателей эксплуатационной, энергетической и экономической эффективности использования работы локомотивов.

При известном подъёме (уклоне) i_k, ‰ величина удельной равнодействующей силы при рабочем ходе

$$u = \mathfrak{f}_k(V) - w_0(V) + i_k \quad (2)$$

при холостом ходе

$$u = -w_0(V) + i_k \quad (3)$$

и при торможении

$$u = -[w_0(V) + i_k + b_т(V)] \quad (4)$$

где $\mathfrak{f}_k(V) = \frac{F_k(V)}{P_0+Q}$, $\frac{Н}{кН}$ $(\frac{кгс}{т})$ - зависимость удельной касательной силы тяги локомотива от скорости для той или иной позиции контроллера машиниста, при заданном весе поезда $P_0 + Q$, т. Зависимости полной величины касательной силы тяги $F_k(V)$ приводится в ПТР [6].

$w_0(V)$ – зависимость удельного основного сопротивления движению поезда от скорости. Находится с учётом основного сопротивления локомотива $w_0(V)$ и состава $w_0'(V)$, которые берут на основании ПТР [6].

Библиографическое описание: Аблялимов О.С. Уравнение движения поезда и некоторые методы его решения // Universum: технические науки : электрон. научн. журн. 2020. № 9(78). URL: https://7universum.com/ru/tech/archive/item/10715

Таким образом

$$\mathbf{w_0}(\boldsymbol{V}) = \frac{\boldsymbol{P_0} * \boldsymbol{w'_0}(\boldsymbol{V}) + \boldsymbol{Q} * \boldsymbol{w'_0}(\boldsymbol{V})}{\boldsymbol{P_0} + \boldsymbol{Q}}, \frac{\text{Н}}{\text{кН}} \left(\frac{\text{кгс}}{\text{т}}\right) \qquad (4')$$

$b_т(\boldsymbol{V})$ – зависимость удельной тормозной силы от скорости для существующих тормозных устройств.

Зависимости $F_k(V), w'_0(V), w''_0(V)$, и $b_т(V)$ для расчётов на ЭВМ обычно приводятся в полиномном виде, аппроксимирующие коэффициенты которых определяются расчётами на ЭВМ по соответствующим программам [3].

Зависимость $u = \varphi(V)$ с определённой степенью точности может быть выражена, например, для рабочего хода грузового поезда

$$\mathrm{U_p} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{5} a_\mathrm{k} V^\mathrm{k} = a_0^\mathrm{p} + a_1^\mathrm{p}\mathrm{V} + a_2^\mathrm{p}\mathrm{V}^2 + a_3^\mathrm{p}\mathrm{V}^3 + a_4^\mathrm{p}\mathrm{V}^4 + a_5^\mathrm{p}\mathrm{V}^5 \qquad (5)$$

где $a_0^p,\ldots,a_5^p$ – коэффициент аппроксимирующего полинома зависимости $u = \varphi(V)$.

Для холостого хода зависимость $u = \varphi(V)$

$$u_x = -(a_0^x + a_1^x V + a_2^x V^2) \qquad (6)$$

при торможении

$$u_т = -(a_т \frac{V+A}{БV+B} + a_0^x + a_1^x V + a_2^x V^2) \qquad (7)$$

где a_0^x, a_1^x, a_2^x, А, Б и В – соответствующие постоянные коэффициенты.

Используя зависимости (2), (3) и (4) при интегрировании выражения (1) по переменной "путь" в определённых пределах получим

$$\int_{\mathbf{V_1}}^{\mathbf{V_2}} \boldsymbol{dV} = \boldsymbol{\xi} \int_{\mathbf{s_1}}^{s_2} \frac{\boldsymbol{\varphi(V)}}{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{ds} \qquad (8)$$

При интегрировании по переменной "скорости"

$$\int_{S_1}^{S_2} \boldsymbol{ds} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\xi}} \int_{V_1}^{V_2} \frac{\boldsymbol{VdV}}{\boldsymbol{\varphi(V)}} \qquad (9)$$

Возможно также интегрирование (1) по переменной “время”. Точное решение (1) невозможно в виду сложности зависимости $u = \varphi(V)$. На ЭЦВМ (электронно – цифровая вычислительная машина) широко используется численный метод Эйлера [2,5], реже Рунге - Кутта. В программе ЦНИИ МПС [3] применено разложение функции $V = f(S)$ в ряд Тейлора с использованием первых трёх членов. Известны разные модификации указанных методов и ряд дополнительных [2, 5]. При ручном счёте чаще всего пользуются графическим методом МПС [1,2], но расчёты требуют большой затраты времени.

Приближённое решение заключается в определение на каждом шаге интегрирования конечного значения скорости $\boldsymbol{V_{n+1} = V_n + \Delta V_n}$.

При использовании численных методов практически высокую точность решения можно достичь, если проводить расчёты с использованием минимально возможного шага интегрирования, но при этом резко возрастает затрата машинного времени, а следовательно и стоимость расчётов.

По методу Эйлера приращение скорости на выбранном шаге $\boldsymbol{h_n}$ будет

$$\Delta \boldsymbol{V_n} = f(\boldsymbol{V_n})\boldsymbol{h_n} = \frac{\boldsymbol{\xi\varphi(V_n)}}{\boldsymbol{V_n}} \boldsymbol{h_n} \qquad (10)$$

где $f(V_n)$ - первая производная скорости по пути для известных начальных условий, 1/ч.

Правильность определения скорости на шаге интегрирования оказывает влияние и на точность определения всех последующих величин. Так, применение метода Эйлера при ограничении приращения скорости $a_n \leq 5 - 10$ км/ч даёт отклонения от практически точных значений, полученных при $a_n = 0{,}5 - 1{,}0$ км/ч, времени хода поезда по перегонам до 8 – 10 процентов, расходов энергии до 3 – 4 процентов и денежных и перевозочных затрат до 1 -3 процентов.

Указанные отклонения возрастают при движении поезда с остановками на промежуточных раздельных пунктах и участковых станциях. Погрешность метода Эйлера на шаге имеет порядок $\boldsymbol{h^2}$.

По методу Рунге - Кутта [2,5] величина приращения скорости на шаге интегрирования может определяться выражением

$$\Delta \boldsymbol{V_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}(\boldsymbol{K_1^0} + \mathbf{2}\boldsymbol{K_2^0} + \mathbf{2}\boldsymbol{K_3^0} + \boldsymbol{K_4^0}) \qquad (11)$$

где $K_1^0 = f(V_n)h_n$ - приращение скорости на шаге по первой производной для начальных условий, км/ч;

$K_2^0 = f(V_n + \frac{K_1^0}{2})h_n$- приращение скорости по первой производной для промежуточной скорости, км/ч;

$K_3^0 = f(V_n + \frac{K_2^0}{2})h_n$ – тоже, для второй промежуточной скорости, км/ч;

$K_4^0 = f(V_n + K_3^0)h_n$ – тоже, для третьей промежуточной скорости, км/ч.

Метод Рунге - Кутта в большинстве случаев даёт хорошие результаты, однако в области выхода на равномерную скорость, процесс счёта нарушается и необходимы повторные пересчёты на уменьшенном шаге. Метод требует значительной затраты машинного времени. Метод имеет погрешность порядка $h^3 - h^5$.

При разложении функции $V = f(S)$ в ряд Тейлора с использованием первых трёх членов получим

$$\Delta V_n = V'_n h_n + V''_n \frac{h_n^2}{2} \qquad (12)$$

где $V'_n = \frac{\xi\varphi(V_n)}{V_n}$ – первая производная скорости по пути для начальных условий, 1/ч;

$V''_n = \xi^2 \frac{\varphi'(V_n)_Y * V_n + \varphi(V_n)}{V_n^3} \varphi(V_n)$ – вторая производная скорости по пути для начальных условий, 1/км·ч;

$\varphi'(V_n)_V$ – первая производная равнодействующей силы по скорости для начальных условий, кг·ч/ткм.

Уточнение изменения интервала скорости ΔV_n по второй производной составляет не более 0,5 км/ч при $a_n \leq 5$ км/ч. В результате ошибки на шаге интегрирования по сравнению с методом Эйлера будут уменьшаться лишь на 10 – 15 процентов. Этот метод требует нахождения производной $\varphi'(V_n)_V$, что связано с увеличением затраты машинного времени.

На втором этапе исследований кратко рассмотрим некоторые другие численные методы решения дифференциальных уравнений, которые в виду их сложности, решить аналитическими методами невозможно.

Имеется обыкновенное дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ при известных начальных условиях x_n и y_n необходимо найти значения x_{n+1} и y_{n+1}, на каждом шаге интегрирования.

Кроме вышеуказанных, наиболее известны следующие численные методы решения дифференциальных уравнений:

а) метод последовательных приближений (метод итераций или метод Пикара [2]. Это один из дающих высокую точность методов, но он является весьма трудоёмким и не во всех случаях применимым;

б) метод А. Н. Крылова [2,5] является дальнейшим развитием метода последовательных приближений. Почти все приближённые методы включают два этапа: нахождение начального отрезка искомого решения, то есть начало решения или вход в таблицу; вычисление дальнейших значений на основе найденных величин, то есть продолжение таблицы.

А. Н. Крылов предложил построение начального отрезка методом последовательных сближений.

в) метод Дж. Адамса [7], который в некотором отношении сходен с методом последовательных приближений, но отличается тем, что решение начинается с вычисления первых четырех значений функции, так называемой начальный участок, которые определяется по начальным условиям (x_n, y_n), используя какой - ннибудь численный метод (Рунге - Кутта, посредством разложения в ряд Тейлора и т.д.). Метод также трудоёмкий и применяется не для всех случаев решения дифференциальных уравнений [2];

г) метод Милна [7] используется для первых четырёх точек значения y и y', найденные каким - либо методом, наиболее подходящим для данного вида уравнения (метод Адамса, Рунге-Кутта и т.д.). Затем, используя специальные формулы Милна, найденные путём интегрирования формулы Ньютона, определяют искомые значения y с определённой точностью (погрешность метода порядка h^4). Программирование метода довольно сложно и расчёты весьма трудоёмки.

д) модифицированные варианты метода Эйлера (усовершенствованный метод ломанных, усовершенствованный метод Эйлера - Коши [2,5,7].

При использовании усовершенствованного метода ломанных, вначале вычисляют промежуточные значения $x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{2}$ и $y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}y'_n$, затем находят значения направлений поля интегральных кривых в средней точке $(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}})$, то есть

$$y'_{n+\frac{1}{2}} = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

и полагают

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_{n+\frac{1}{2}}$$

В результате получают соответствующие уточнение решения, но это требует дополнительной затраты времени.

В усовершенствованном методе Эйлера - Коши после определения $\overline{y_{n+1}} = y_n + y'h$ находят новое направление поля интегральных кривых $\overline{y_{n+1}} = f(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}})$, затем приближение полагают

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{y'_n + \overline{y'_{n+1}}}{2}.$$

Ещё более точные результаты могут быть получены, применяя итерационную обработку [2,5,7], однако это усложняет процесс решения.

В большинстве существующих программ тяговых расчётов использовался метод Эйлера [3 и другие], что приводит к ряду недостатков, ухудшающих результаты счёта [8,9] и удорожая их.

Таким образом, рассмотренные (приведённые) автором недостатки решения дифференциального уравнения движения поезда существующими методами заставляют продолжать исследования по дальнейшему совершенствованию, имеющихся численных методов решения, с целью разработки удобных методов для использования при расчётах на ЭВМ и в практике работы специалистов локомотивного комплекса железных дорог.

Список литературы:

1. Аблялимов О. С. Основы управления локомотивов [Текст] / О. С. Аблялимов, Э. С. Ушаков // Учебник для профессиональных колледжей железнодорожного транспорта. – Ташкент: «Davr», 2012. – 392 с.
2. Березин И. С. Методы вычислений [Текст] / И. С. Березин, Н. П. Жидков. - Изд. 2-е. – М.: ГИФМЛ, 1962. – Т. 1. – 464 с.
3. Быков В. Н. Производство тяговых расчётов и определение эксплуатационных расходов по передвижению поездов [Текст] / В. Н. Быков К. М. Берестовенко // Тр. ВНИИТС, вып. 51 / Всероссийский науч – иссл. ин-т твёрдых сплавов. – Москва, 1964. – С. 59 – 67.
4. Деев В. В. Тяга поездов [Текст] / В. В. Деев, Г. А. Ильин, Г. С. Афонин // Учебное пособие для вузов. – М.: Транспорт, 1987. – 264 с.

5. Демидович Б. П. Численные методы анализа [Текст] / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова // Учебное пособие. - 3-е изд., перераб. - М.: Наука, 1967. - 368 с.
6. Правила тяговых расчётов для поездной работы [Текст] / Всесоюзный научно – исследовательский институт железнодорожного транспорта. – М.: Транспорт, 1985. – 287 с.
7. Скарборо Д. Численные методы математического анализа (перевод с англ.) [Текст] / Д. Скарборо. – М.: ГИФМЛ, 1934. – 437 с.
8. Толкачёв А. В. О методах решения уравнения движения поезда при расчётах на ЭЦВМ [Текст] / А. В. Толкачёв // Тр. ТашИИТ, вып. 88 / Ташкентский ин-т. инж. ж-д трансп. – Ташкент, 1972. – С. 79 – 87.
9. Толкачёв А. В. О численном методе решения уравнения движения поезда [Текст] / А. В. Толкачёв // «Вестник ВНИИЖТ» / Всесоюзный науч-иссл. ин-т. ж-д транспорта. – М.: Трансжелдориздат, 1972, № 7. – С. 53 – 59.