7universum.com
UNIVERSUM:
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

# НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

***Перевозников Евгений Николаевич***
*канд. физ.-мат. наук, доцент,*
*Санкт-Петербургский торгово-экономический университет,*
*Россия, г. Санкт-Петербург*
*E-mail: olg.mikhailova@mail.ru*

***Михайлова Ольга Юрьевна***
*старший преподаватель,*
*Санкт-Петербургский торгово-экономический университет,*
*Россия, г. Санкт-Петербург*

# UNSTABILITIES OF DYNAMIC SYSTEMS

***Perevoznikov Yevgenij***
*candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor*
*Saint-Petersburg University of Trade and Economics,*
*Russia, Saint-Petersburg*

***Mikhailova Olga***
*senior lecturer, Saint-Petersburg University of Trade and Economics,*
*Russia, Saint-Petersburg*

## АННОТАЦИЯ

Рассматриваются два метода анализа устойчивости систем, описываемых динамическими уравнениям. Они основаны на анализе спектра собственных значений эволюционной матрицы или спектрального уравнения и позволяют определять, как условия устойчивости / неустойчивости, так и возможность хаотического поведения систем при потере устойчивости. Методы демонстрируются на примере модельных нелинейных задач Лоренца, Рёсслера.

Перевозников Е.Н., Михайлова О.Ю. Неустойчивости динамических систем // Universum: Технические науки : электрон. научн. журн. 2015. № 2 (15) .
URL: http://7universum.com/ru/tech/archive/item/1957

**ABSTRACT**

Two methods of stability analysis of systems described by dynamical equations are being considered. They are based on an analysis of eigenvalues spectrum for the evolutionary matrix or the spectral equation and they allow determining the conditions of stability and instability, as well as the possibility of chaotic behavior of systems in case of a stability loss. The methods are illustrated for nonlinear Lorenz and Rössler model problems.

**Ключевые слова:** нелинейные динамические системы, методы анализа устойчивости, динамический хаос, модельные задачи Лоренца, Рёсслера.

**Keywords:** nonlinear dynamical systems, stability analysis methods, dynamical chaos, Lorenz and Rössler model problems.

Работа посвящена методам практического анализа устойчивости систем, описываемых нелинейными автономными уравнениями. Анализ таких систем вызывает повышенный интерес из-за наблюдаемого в них при потере устойчивости феномена динамического хаоса [1; 2]. В качестве примера, показывающего возможности предлагаемых методов приводится анализ устойчивости модельных нелинейных систем Лоренца, Рёсслера [1; 2].

*1.Методы анализа устойчивости*

Одними из наиболее распространенных методов исследования устойчивости систем являются спектральные, состоящие в анализе спектров динамики малых возмущений. При этом задача формулируется следующим образом.

Пусть состояние системы задается совокупностью макроскопических характеристик $\{a_\alpha\}$, удовлетворяющих уравнениям движения

$$\partial_t a_\alpha = F_\alpha(r,t,\{a_\alpha\}) \quad , \quad \alpha = 1... \quad n\,. \tag{1}$$

Линеаризацией этих уравнений получается система уравнений, описывающих динамику малых возмущений $\{\delta a_\alpha\}$ исходного состояния $\{a_\alpha\}$

$$d_t \delta a_\alpha = \sum_\beta \frac{\delta F_\alpha}{\delta a_\beta} \cdot \delta a_\beta \equiv E_{\alpha\beta} \delta a_\beta \quad , \quad \alpha, \beta = 1 \ldots n. \tag{2}$$

$$E_{\alpha\beta} = \left( \frac{\delta F_\alpha}{\delta a_\beta} \right)_s = E_{\alpha\beta}(r, t, \nabla, \int_{x,t} \times, \{a_\alpha\})$$

где: $E_{\alpha\beta}$ — элементы эволюционного матричного оператора, зависящие в общем случае от параметров исходного состояния, координат — r, времени — t, градиентов — $\nabla$, интегральных операторов типа свертки по пространству и времени — $\int_{x,t} \times$.

Условие разрешимости системы (2), являющееся её спектральным уравнением — (СУ)

$$D = \det\left[\delta_{\alpha,\beta}\lambda - E_{\alpha,\beta}\right] = 0, \tag{3}$$

определяет спектр собственных значений — $\{\lambda_\alpha\}$ эволюционного оператора и устойчивость исходного состояния — $\{a_\alpha\}$.

В преобразовании Фурье—Лапласа по возмущениям в случае стационарных исходных состояний, а также в случаях, когда исходные зависимости слабы на фоне высокоскоростных и высокоградиентных возмущений (метод локального дисперсионного уравнения — ЛДУ), спектральное уравнение приобретает полиномиальный вид

$$D(z, k, a_s) = z^n + \sum A_m(z, k, a_s) \cdot z^{n-m} = 0, \tag{4}$$

где: $z$, $k$ — параметры преобразования Фурье—Лапласа, $A_m = (a_m + i\, b_m)$ — комплексные коэффициенты СУ.

В классической постановке задача анализа устойчивости сводится к исследованию корней спектрального уравнения.

Признаком неустойчивости является наличие корней СУ с положительной вещественной частью Re (z) >0. Если все корни СУ имеют отрицательные вещественные части, то исходное состояние задаваемое $\{a_s\}$, — устойчиво.

Так как точное решение уравнения (4) с комплексными коэффициентами для n>2 невозможно, то для анализа используются критерии

знакоопределенности вещественной части корней — критерий Рауса-Гурвица, метод D-разбиений, частотные критерии. Однако их эффективность в силу громоздкости и сложности вычислений, особенно при анализе существенно неравновесных систем, невысока. На практике чаще всего используют численные методы или ищут специальные критерии, применимые для некоторых типов задач. Но любые специфические критерии неуниверсальны, численные решения не позволяют получать условия устойчивости в аналитической форме, просматривать их зависимость от параметров и требуют больших объёмов вычислений.

В работе [3] предложено два метода практического анализа устойчивости систем, описываемых уравнениями (1) и называемых критериями нейтральности. Суть этих методов состоит в определении по коэффициентам динамических уравнений (2) или по коэффициентам спектрального уравнения (4) нейтральной поверхности — границы, разделяющей в пространстве параметров области устойчивости и неустойчивости.

а) Метод НРИ (нейтральность, разделение, исключение)

основан на спектральном уравнении (4) и реализуется следующей схемой

$$(z = Re\, z + i\,\acute{\omega},\ \Delta z = z - z_{cr},\ \Delta a_s = a_s - a_{s,cr})$$

$$\left\{\begin{array}{l} D(z,r,a_s)=0 \\ z_{cr}=i\,\omega_{cr} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} D_1(\omega,k,a_s)=0 \\ D_2(\omega,k,a_s)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S(k,a_s)=0 \\ \omega_{cr}=\omega(k,a_s) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Re}(\Delta z) = -\left[\frac{\partial_a D}{\partial_z D}\right]_{cr} \Delta a_s \ \begin{array}{c} >^{HY} \\ <^{Y} \end{array} \ 0$$

(5.1), (5.2), (5.3) (5.4).

(5.1) — нейтральность — условие равенства нулю вещественной части корней СУ;

(5,2) — разделение спектрального уравнения на два при условии нейтральности;

(5.3) — исключение из этих уравнений частоты или одного из параметров и получение нейтральной поверхности — $S(k,a_s)$ и критической частоты — $\omega_{cr}(k,a_s)$;

(5.4) — указание областей устойчивости / неустойчивости относительно нейтральной поверхности.

Схема НРИ полностью реализуется для полиномиальных СУ, общие условия нейтральности (3.3) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} S(k,a_s) &= R\left[\, D_1(\omega,k,a_s), D_2(\omega,k,a_s)\,\right] = 0 \\ \omega - \omega_{cr} &= NOD\left[\, D_1(\omega,k,a_s), D_2(\omega,k,a_s)\,\right] = 0 \end{aligned}, \qquad (6)$$

гд: R — результант, а NOD — наибольший общий делитель полиномов $D_1$ и $D_2$.

В частности, для системы третьего порядка условия (6) равны

( $(a,b)_{m1}=(a,b)_m / a_1$ )

$$\begin{aligned} &\left[a_{31}(b_{21}-b_1)+b_3\right]_1^2 - \left[b_{21}(b_{21}-b_1)+(a_{31}-a_2)\right]_2 \cdot \left[a_{31}(a_{31}-a_2)-b_{21}\cdot b_3\right]_3 = 0 \\ &\omega_{cr} = \left[\,..\;..\right]_1 / \left[\,....\right]_2 = \left[\,...\;.\right]_3 / \left[\,...\;\right]_1 \end{aligned}. \qquad (7)$$

b) Метод L — критерия

выражается через определитель блочной матрицы L

$$\det(L) = \begin{vmatrix} \hat{E}+\hat{I}\,e_{11}^* & \hat{I}\,e_{12}^* & . & . & . & . & \hat{I}\,e_{1n}^* \\ \hat{I}\,e_{21}^* & \hat{E}+\hat{I}\,e_{22}^* & & & & & \hat{I}\,e_{2n}^* \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \hat{I}\,e_{n1}^* & & \hat{I}\,e_{n2}^* & . & . & \hat{E}+\hat{I}\,e_{nn}^* & \end{vmatrix} = \prod_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\lambda_\alpha+\lambda_\beta^*\right) =$$

$$= 2^n \prod_{\alpha=1}^{n} \mathrm{Re}\,\lambda_\alpha \prod_{\alpha,\beta=1}^{n}\left[\left(\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha+\mathrm{Re}\,\lambda_\beta\right)^2+\left(\mathrm{Im}\,\lambda_\alpha-\mathrm{Im}\,\lambda_\beta\right)^2\right], \qquad (8)$$

элементами которой являются эволюционная матрица $\hat{E}$ и её коэффициенты $\hat{I}$ единичная матрица, $e_{\alpha,\beta}^*$ — комплексно-сопряженные элементы матрицы $\hat{E}$, а $\lambda_{\alpha,\beta}$ — её собственные значения.

Критерий нейтральности и уравнение для критических частот в этом методе имеют вид

$$\begin{array}{l}(-1)^{n+1}\cdot\det(L)=(-1)^{n+1}\cdot\det\left[\delta_{\alpha,\beta}\hat{E}+\hat{I}\,e^{*}_{\alpha,\beta}\right]\ \begin{array}{c}>^{HY}\ 0\\ <_{Y}\ 0\end{array}\\ \sum_{m=1}^{n}\left[(A_m-(-1)^m\cdot A^{*}_m)\cdot(i\omega)^{n-m}\right]=0\end{array}. \qquad (9)$$

Коммутация блоков матрицы L позволяет оперировать ими как числами и, в частности, понижать порядок её определителя. В результате чего L-критерий можно привести к виду

$$(-1)^{m+1}\cdot\det\left[\sum_{m=1}^{n}(A^{*}_m-(-1)^m\cdot A_m)\cdot\hat{E}^{n-m}\right]\ \begin{array}{c}>^{HY}\ 0\\ <_{Y}\ 0\end{array}$$

где: $A, A^{*}$ — коэффициенты спектрального уравнения.

*2.Нелинейные системы*

Пусть уравнения (1), описывающие исследуемую на устойчивость систему, представляют собой совокупность нелинейных автономных уравнений

$$d_t a_\alpha \equiv \frac{da_\alpha}{dt}=F_\alpha(\{a_\alpha\}). \qquad (10)$$

Динамика возмущений системы (10) в этом случае описывается уравнениями (11)

$$d_t\delta a_\alpha=\sum_\beta\frac{\delta F_\alpha}{\delta a_\beta}\cdot\delta a_\beta\equiv E_{\alpha\beta}\delta a_\beta\quad,\quad \alpha,\beta=1\ldots n., \qquad (11)$$

где: $E_{\alpha\beta}(\{a_\alpha(t)\})$ — элементы эволюционной матрицы, зависящие от динамических переменных $\{a_\alpha\}$ и времени t.

Если все временные производные в (11) отрицательны, то возмущения затухают и система устойчива по Ляпунову. Если существует хотя бы одна положительная производная, то фазовые траектории разбегаются, система неустойчива. Соотношение знаков производных позволяет определить возможность хаотического поведения и образования в фазовом пространстве сложных локализованных конструкций — странных аттракторов [1] (см. рис. 1, 2).

В этих случаях для анализа устойчивости метод спектрального уравнения (4) и метод НРИ (5) в классическом варианте неприменимы.

Так как L-критерий непосредственно выражается через коэффициенты динамических уравнений, то это позволяет обобщить его для анализа устойчивости нелинейных систем, если ввести обобщенные собственные значения эволюционной матрицы $\tilde{\lambda}_i = \partial_t \left( \ln |\delta a_i| \right)$. При этом последние будут функциями времени, знак которых однозначно определяется знаком временных производных $\partial(\delta a_\alpha)$ и которые автоматически переходят в обычные собственные значения в случае стационарных состояний. Тогда форма и смысл L-критерия относительно обобщенных собственных значений сохраняются.

$$(-1)^{n+1} \cdot \det(L) = (-1)^{n+1} \cdot \det\left[ \delta_{\alpha,\beta} \hat{E} + \hat{I}\, e^*_{\alpha,\beta} \right] = \prod_{\alpha,\beta=1}^{n} \left( \tilde{\lambda}_\alpha + \tilde{\lambda}^*_\beta \right) \underset{<_У}{\overset{>^{НУ}}{0}}. \qquad (12)$$

А именно: равенство нулю критерия (12) соответствует наличию нулевых производных (собственных значений), смена знака критерия — смене знака временных производных в динамических уравнениях (11). Таким образом, анализ множителей в (12) представляет собой анализ спектра собственных значений эволюционной матрицы нелинейной системы и, следовательно, анализ знаков временных производных в уравнениях (11).

Подобное обобщение формально можно провести и для метода НРИ (5) и спектрального уравнения (4), только теперь $z$, $\omega$ не параметры преобразования Лапласа, которое в этом случае неприменимо, а обобщенные собственные значения $\tilde{\lambda}_i = \partial_t \left( \ln |\delta a_i| \right) = \mathrm{Re}\, \tilde{\lambda} + i\tilde{\omega}$.

Итак, используем обобщенные методы НРИ и L-критерия для анализа устойчивости нелинейных модельных систем Лоренца и Рёсслера, а также оценим возможности предлагаемых методов для выяснения наличия динамического хаоса.

*3. Модельная задача Лоренца [1; 2].*

Задача Лоренца интересна тем, что к нелинейным уравнениям модели Лоренца сводятся уравнения динамики ряда реальных физических систем: конвекция в слое жидкости, подогреваемом снизу, одномодовый лазер, водяное

колесо и др. Кроме того, она явно демонстрирует возникновение хаотической динамики.

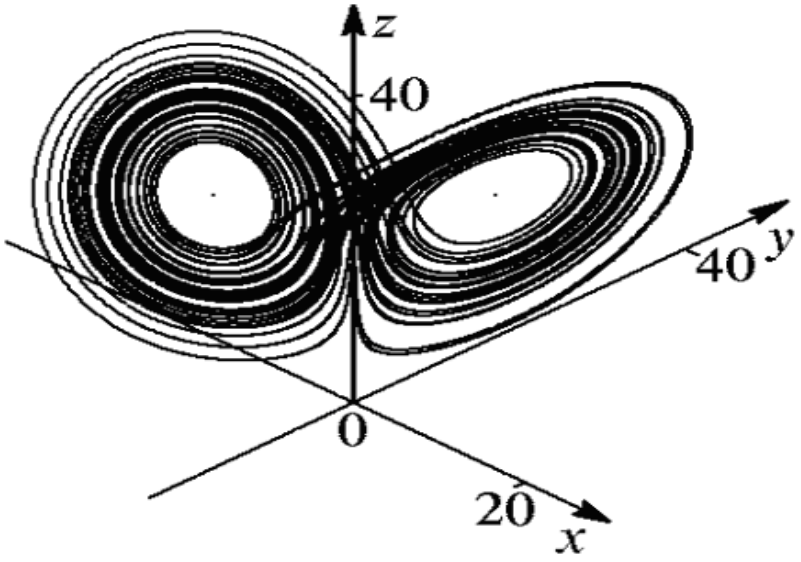


***Рисунок 1. Аттрактор Лоренца для «классических» значений параметров σ=10, b=8/3, r=28***

Уравнения модели Лоренца имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t x &= \sigma(y - x) \\ \partial_t y &= rx - y - xz, \\ \partial_t z &= -bz + xy \end{aligned} \qquad (13)$$

где: *x, y, z* — динамические переменные, $\sigma, r, b$ — параметры, причем управляющим, играющим смысл интенсивности является параметр *r> 0.*

В фазовом пространстве переменных *(x, y, z)* состояние системы можно представить вектором скоростей, $\vec{B}(\partial_t x, \partial_t y, \partial_t z)$, дивергенция которого характеризует диссипативность системы и может являться одним из условий устойчивости.

$$divB = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}. \qquad (14)$$

Если *divB<0,* фазовый объем уменьшается, траектории сближаются. Если *divB>0,* то фазовый объем увеличивается, траектории разбегаются — система теряет устойчивость. Из уравнений (13) имеем

$$divB = -(\sigma + b + 1) < 0$$

т. е. система Лоренца диссипативна.

Система (13) имеет два стационарных решения — стационарных состояния $(x_s, y_s, z_s)_1$, $(x_s, y_s, z_s)_2$,

$$\begin{array}{lll} \partial_t x = 0 & x_s = 0 & x_s = y_s \\ \partial_t y = 0 \;\Rightarrow 1) & y_s = 0 \;\; ; \;\; 2) & x_s = \pm\sqrt{bz_s} = \pm\sqrt{b(r-1)}\,. \\ \partial_t z = 0 & z_s = 0 & z_s = r-1 \end{array} \qquad (15)$$

Линеаризация системы (13) относительно решения $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, в качестве которого может быть выбрано любое, в том числе и стационарное, дает систему уравнений для возмущений (11), где эволюционная матрица равна

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -\tilde{z}_+ & -1 & -\tilde{x} \\ \tilde{y} & \tilde{x} & -b \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Спектральное уравнение и его коэффициенты в стационарном случае равны ($\tilde{z}_+ \equiv \tilde{z} - r$)

$$\det\left[\delta_{\alpha,\beta}\lambda - E_{\alpha,\beta}\right] = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0;$$

$$a_1 = (1+b+\sigma) \quad , \quad a_2 = b + (1+b+z_+)\cdot\sigma + x_s^2 \quad , \quad a_3 = \sigma\left[x_s^2 + x_s y_s + b(1+z_+)\right]. \qquad (17)$$

(Заметим, что условие диссипативности совпадает по модулю с первым коэффициентом спектрального уравнения и равно сумме собственных значений эволюционной матрицы. Можно показать, что это есть общий результат).

Метод НРИ для СУ (17) дает два критических — нейтральных режима

$$1) \quad \lambda = 0 \quad , \quad a_3 = 0\,, \qquad (18)$$

$$2) \quad \omega^2 = a_2 \quad , \quad a_1 a_2 = a_3\,. \qquad (19)$$

Режим (18) реализуется для первого стационарного состояния и соответствует его неустойчивости при $r \geq 1$, собственные значения в этом случае равны

$$\lambda_1 = -b \quad , \quad \lambda_{2,3} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2 + b(r-1)}\,. \qquad (20)$$

Режим (19) реализуется для второго стационарного состояния, и для классических значений параметров Лоренца критические значения частоты и параметра $r$ равны

$$\omega_{cr} = \sqrt{b(r+\sigma)} = 9.62 \quad , \quad r_{cr} = \frac{\sigma(3+b+\sigma)}{\sigma-1-b} = 24.7 . \tag{21}$$

При $r>r_{cr}$ второе стационарное состояние становится неустойчивым, при этом ($r=r_{cr}$ $\lambda_1 = -13,7$ , $\lambda_{2,3} = +0 \pm 9.62i$) вещественная часть второго и третьего собственных значений становится положительной, т. е. появляются слаборастущие колебания. Например, при

$$r = 24.8 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -13.62 \quad , \quad \lambda_{2,3} = 1.902 \cdot 10^{-3} \pm 9.636i .$$

L-критерий для состояний (15), соответственно, дает выражения

$$\det L = (-1)^4 2^3 \sigma(\sigma+1)^2 b(r-1)\left(\frac{428}{9} - 10r\right)^2 \underset{y<0}{\overset{HV}{\gtrless}} 0, \tag{22}$$

$$\det L = (-1)^4 5\left(\frac{2}{3}\right)^4 (-2166 \cdot b^3)(r-1)(r-24.7)(r-67.9) \underset{<0}{\overset{>0}{\gtrless}} . \tag{23}$$

Как и следовало ожидать, критерий (22) показывает неустойчивость первого стационарного состояния (15) при *r>1*. Из (23) следует, что неустойчивость второго стационарного состояния (существующего при *r>1*) наступает при *r>24.7* и что согласуется с критерием НРИ и спектром. В критерии (23) есть три множителя, меняющих знак, что соответствует знакам трех временных производных в исходных уравнениях системы (13). При *r=24.7* первый множитель — положительный, второй равен нулю, третий — отрицательный. Таким образом, комбинация знаков производных соответствует условию возникновения хаотической динамики в системе см. [1]. А именно: если знаки собственных значений ($\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$) равны

$$\begin{aligned} &a) \quad Sgn(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow (-, -, -) \\ &b) \quad Sgn(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow (0, -, -), \\ &c) \quad Sgn(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow (-, 0, +) \end{aligned} \tag{24}$$

то динамический режим имеет характер соответственно

a — устойчивой точки;

b — предельного цикла;

c — аттрактора (хаотической динамики).

Таким образом, в системе Лоренца с $r=24.7$ до $r=67.9$ существует хаотический режим с фазовым портретом рис. 1. При $r>67.9$ меняет знак третья производная, и система полностью теряет устойчивость, переходя в область сложной нерегулярной динамики.

Заметим, что в критерии (23) заложен и первый критический режим $r \geq 1$, связанный с неустойчивостью первого стационарного состояния; также можно показать, что критическая частота, вычисленная по формуле (7), совпадает со значением, определенным по спектру (21).

*4.Модельная задача Рёсслера —*

нелинейная задача, имеющая явно выраженную область хаотического поведения с аттрактором, представленным на рис. 2. см. [1; 2].

Уравнения модели Рёсслера имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t x &= -y - z \\ \partial_t y &= x + e \cdot y \\ \partial_t z &= d - r \cdot z + x \cdot z \end{aligned} \quad . \tag{25}$$

$x$, $y$, $z$ — динамические переменные; $e$, $d$, $r$ — параметры, r — управляющий параметр. Дивергенция вектора скоростей $\vec{B}(\partial_t x, \partial_t y, \partial_t z)$, характеризующая диссипативность системы, равна

$$divB = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = e - r + x = \frac{>0}{<0}. \tag{26}$$

Из (26) следует, что система Рёсслера диссипативна только в ограниченной области.

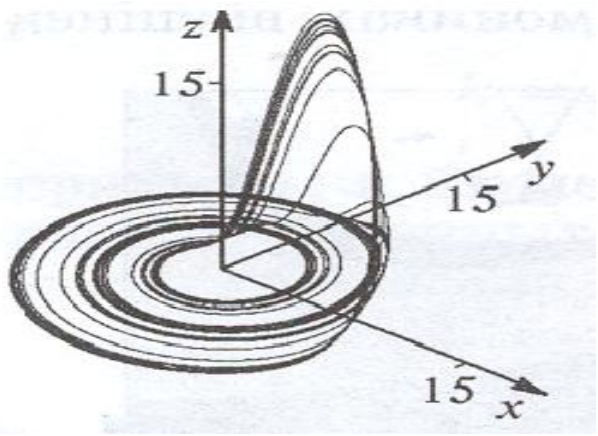


***Рисунок 2. Аттрактор Весслера при e = d = 0.2 r = 5.7***

Система (25) имеет два стационарных решения — стационарных состояния $(x_s, y_s, z_s)$

$$\begin{array}{ll} \partial_t x = 0 & y_s = -z_s \\ \partial_t y = 0 & x_s = e \cdot z_s \\ \partial_t z = 0 & z_s = \dfrac{r}{2e} \pm \sqrt{\left(\dfrac{r}{2e}\right)^2 - \dfrac{d}{e}} \end{array}, \qquad (27)$$

которые возможны при условии $r \geq 2e \cdot d$. Для параметров Весслера

$e = d = 0.2$ $r = 5.7$ стационарные решения имеют вид

$$1)\quad x_s = 0.01 \qquad z_s = -y_s = 0.05 \qquad 2)\quad x_s = 5.69 \qquad z_s = -y_s = 28.95. \qquad (28)$$

Линеаризация уравнений (25) относительно решения $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, в качестве которого может быть выбрано любое решение, в том числе и стационарное, дает систему уравнений для возмущений (11), где эволюционная матрица равна

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & e & 0 \\ \tilde{z} & 0 & \tilde{x} - r \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Спектральное уравнение системы (25) и его коэффициенты длясстационарных состояний, соответственно, равны

$$\det\left[\delta_{\alpha,\beta}\lambda - E_{\alpha,\beta}\right] = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0;$$

$$a_1 = -\left(e + x_s - r\right) \quad , \quad a_2 = \left[1 + x_s\left(e^{-1} + e\right) - re\right] \quad , \quad a_3 = -\left(2x_s - r\right). \qquad (30)$$

Критерий НРИ для СУ (30) дает два критических — нейтральных режима (18,19), в данном случае принимающих вид

$$\begin{array}{ll} 1) & \omega_{cr}=0 \quad , \quad 2x_s-r=0 \\ 2) & \omega_{cr}=\sqrt{1+x_s\left(e^{-1}+e\right)-re} \quad , \quad e\left(x_s-r\right)\left(x_s-r+e\right)=0 \end{array} . \tag{31}$$

Анализ условий (31) совместно с условиями стационарности (27) показывает,

что при $r=2e=0.4$ оба условия (31) совпадают, а корни СУ (30) равны

$$\lambda_1=0 \quad ; \quad \lambda_{2,3}=0\pm 1.7i\,. \tag{32}$$

Первый критический режим реализуется только для второго стационарного состояния ($r\geq 2e=0.4$), которое при *r>0.4* становится неустойчивым, а корни СУ, например при r=0.5, соответственно, равны

$$\lambda_1=-0.215 \quad ; \quad \lambda_{2,3}=0.00546\pm 1.19i\,. \tag{33}$$

Второй критический режим реализуется для первого стационарного состояния, которое также неустойчиво при *r>0.4*. И при r=0.5 корни СУ становятся равными

$$\lambda_1=0.101 \quad ; \quad \lambda_{2,3}=-0.0054\pm 1.7i\,. \tag{34}$$

Такими образом, оба стационарных состояния по-разному являются неустойчивыми.

L-критерий (12) относительно произвольных решений $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ после ряда преобразований принимает вид ($x_+\equiv\tilde{x}-r \quad ; \quad n=3$)

$$\det L=8\left(x_++e\tilde{z}\right)\left[ex_+\left(x_++e\right)+\left(e+x_+\tilde{z}\right)\right]^2 \ \begin{matrix}>^{HY}\\ <^{Y}\end{matrix}\ 0\,. \tag{35}$$

Для стационарных решений (27) критерий (35) преобразуется к форме

$$\det L=8e^2\left(x_s-r-e\right)\left(x_s-r\right)\left(x_s-r+e\right)^3 \ \begin{matrix}>^{HY}\\ <^{Y}\end{matrix}\ 0\,. \tag{36}$$

Как и следовало ожидать, L-критерий содержит оба критических режима, полученных по методу НРИ (31), причем один из сомножителей в критерии совпадает с условием диссипативности. L-критерий, в отличие от метода НРИ, как и в задаче Лоренца, содержит дополнительный — третий множитель, соответствующий знаку третьей временной производной в исходных

уравнениях. Из (36) следует, что для модели Весслера в зависимости от параметров (r, e, d) возможна реализация всех трех режимов (см. 31). Например, при $x_s \approx r$ знаки множителей в (36) и, соответственно, знаки временных производных в исходной системе равны

$$Sgn(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow (-, 0, +),$$

что указывает на хаотическое поведение системы с фазовым портретом типа, изображенного на рис. 2.

Итак, применение модифицированных методов НРИ и L-критерия для анализа устойчивости нелинейных систем позволяет не только получать условия устойчивости / неустойчивости, но и предсказывать возможность хаотической динамики в последних.

**Список литературы:**


1. Кузнецов С.П. Динамический хаос, ФМ. — М. : Физматгиз,2006. — 355 с.
2. Ланда И.П. Нелинейные волны и колебания. — М. : Наука, 1997. — 496 с.
3. Перевозников Е.Н. Методы анализа устойчивости динамики неравновесных систем // Изв. вузов. Физика. — 2006. — № 10. — С. 34—39.