ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

О НЕОГРАНИЧЕННОРАЗМЕРНЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Запаров Ахмаджон
ст. преподаватель, кафедра математики, Андижанский госуниверситет,
Республика Узбекистан, г. Андижан

Арзикулов Фарходжон
д-р физ.-мат. наук, доцент, кафедра математики, Андижанский госуниверситет,
Республика Узбекистан, г. Андижан

Абдукаюмова Турсунхон Шухратбек кизи
студент 2-го курса, кафедра математики, Андижанский госуниверситет,
Республика Узбекистан, г. Андижан
E-mail: abdukayumova98@mail.ru

Абдуллаева Матлубахон Ашира ли кизи
студент 2-го курса, кафедра математики, Андижанский госуниверситет,
Республика Узбекистан, г. Андижан

ABOUT LIMITLESS DIMENTIONAL SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS

Ahmadjon Zaparov
Head lecturer, department of mathematics, Andijan state university,
Republic of Uzbekistan, Andijan city

Farkhod Arziqulov
DSc, assistant professor, department of mathematics, Andijan state university,
Republic of Uzbekistan, Andijan city

Tursunkhon Abduqayumova
Student of the department of mathematics, Andijan state university,
Republic of Uzbekistan, Andijan city

Matlubakhon Abdullayeva
Student of the department of mathematics, Andijan state university,
Republic of Uzbekistan, Andijan city

АННОТАЦИЯ

В статье изучены системы уравнений, проблемы применения методов их решений к неограниченноразмерным системам линейных уравнений.

ABSTRACT

In this article was studied the systems of linear equations, the using problems of solving methods in limitless dimentional system of linear equations.

Ключевые слова: неограниченноразмерные, система линейных уравнений.
Keywords: limitless dimentional, the system of linear equations.

Известно, что системы линейных уравнений входят в курс среднего образования и являются одними из первых изучаемых математических объектов. Однако можно сказать, что они до сих пор не изучены

Библиографическое описание: О неограниченноразмерных систем линейных уравнений // Universum: Технические науки: электрон. научн. журн. Запаров А. [и др.]. 2018. № 12(57). URL: http://7universum.com/ru/ tech/archive/item/6655

полностью. В настоящей статье рассмотрены сферы, в которых еще не применены эти системы. Подтверждением тому могут служить выводы, сделанные в статье, о бесконечноразмерных системах линейных уравнений.

В данной работе использованы методы ограниченных систем линейных уравнений для изучения понятий бесконечноразмерных систем линейных уравнений, их эквивалентности и решения. В статье показано, что понятия и методы решения ограниченно размерных систем линейных уравнений могут быть применены для некоторых типов бесконечноразмерных систем линейных уравнений. Для этого рассмотрим следующую систему бесконечноразмерных линейных уравнений общего вида:

$$\begin{cases} a_{1j_1}x_{j_1} = b_1 \\ a_{2j_1}x_{j_1} + a_{2j_2}x_{j_2} = b_2 \\ a_{3j_1}x_{j_1} + a_{3j_2}x_{j_2} + a_{3j_3}x_{j_3} = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{mj_1}x_{j_1} + a_{mj_2}x_{j_2} + \dots + a_{mj_m}x_{j_m} = b_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}.$$

1. Бесконечноразмерные системы линейных уравнений, их эквивалентность и их решения.

Мы применяем понятия и методы решений систем линейных уравнений для некоторых типов бесконечноразмерных линейных уравнений. Для этого сначала рассмотрим систему бесконечноразмерных линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = b_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad (1)$$

Если рассмотрим систему как систему ниже треугольных бесконечно размерных линейных уравнений, то число уравнений в этой системе линейных уравнений является бесконечным. Неизвестными этой системы являются *x1, x2, ..., xm*; свободными числами неограниченной последовательности – *b1, b2, ..., bm* – образуют бесконечную последовательность. Основной матрицей для данной системы является следующее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

Описание. Пусть задана система (1) со следующей системой бесконечноразмерных линейных уравнений.

$$\begin{cases} b_{11}x_1 = c_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 = c_2 \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = c_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mm}x_m = c_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad (2)$$

Тогда системы (1) и (2) называются эквивалентными, если для любого натурального числа *m* следующие системы взаимно эквивалентны.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} b_{11}x_1 = c_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 = c_2 \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = c_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mm}x_m = c_m \end{cases}.$$

Последовательность λ1, λ2, ..., λm называется решением системы, если для любого натурального числа m числа *λ1, λ2, ..., λm* являются решениями уравнения (3). Поиск всех решений системы (1) называется решением этой системы. Ясно, что нахождение значений переменных системы (1) производится от верхней части к нижней.

Пример. Пусть дана следующая система линейных уравнений с неограниченной размерностью.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad (4)$$

Эта система имеет единственное решение, которое представляет собой следующую последовательность:

x1 = 1, x2 = 0, x3 = 0, x4 = 0, ..., xm = 0, ...

Действительно, для любого натурального числа m, x1 = 1, x2 = 0, x3 = 0, x4 = 0, ..., xm = 0 будет единственным решением следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Теперь к системе (1) мы применяем метод Крамера. Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть для системы (1)

$$A_m = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$B_m = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

Здесь матрица *Bm* образуется заменой свободных чисел последнего столбца матрицы *Am*. Предположим, что для всех матриц Am детерминанты отличаются от нуля. Тогда решением системы (1) является единственная последовательность (x1, x2, ..., xm, ...), которая удовлетворяет условию

$$x_m=det(C_i^m)/det(A_m),\ i=1,2,...m.$$

Доказательство. Согласно условию леммы для любого натурального числа m (3) решение системы (1) единственно и находится следующим образом:

$$x_m=det(C_i^m)/det(A_m),\ i=1,2,...m.$$

Здесь

$$C_i^m = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & b_1 \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & b_2 \cdots a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & b_3 \cdots a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & b_m \cdots a_{mm} \end{pmatrix},$$

значит, C_i^m матрица образуется заменой свободных чисел i-ного столбца матрицы A_m. Предположим, что уместно равенство $C_m^m=B_m$. Кроме того, единственное решение $(x_1,x_2,...,x_m)$ системы (3) удовлетворяет m-ным количествам начальных уравнений системы (1). Так как натуральное число *m* выбрано случайно, естественное число необязательно

$$x_m=det(C_i^m)/det(A_m)=det(B_i)/det(A_i),\ i=1,2,...m.$$

Доказательство закончено.

Теперь дадим систему бесконечномерных линейных уравнений в следующем общем виде.

$$\begin{cases} a_{1j_1}x_{j_1} = b_1 \\ a_{2j_1}x_{j_1} + a_{2j_2}x_{j_2} = b_2 \\ a_{3j_1}x_{j_1} + a_{3j_2}x_{j_2} + a_{3j_3}x_{j_3} = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{mj_1}x_{j_1} + a_{mj_2}x_{j_2} + \cdots + a_{mj_m}x_{j_m} = b_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \quad (6)$$

Как вы можете видеть, некоторые из переменных могут быть недоступны в этой системе. По этой причине коэффициенты переменных, не указанных в системе, считаются нулевыми. Решение данной системы x1, x2, ..., xn, ... можно искать в виде неограниченной последовательности. Для таких систем понятие эквивалентности систем можно описать следующим образом.

Описание. Пусть вместе с системой (6) задана следующая система бесконечноразмерных линейных уравнений:

$$\begin{cases} b_{1i_1}x_{i_1} = c_1 \\ b_{2i_1}x_{i_1} + b_{2i_2}x_{i_2} = c_2 \\ b_{3i_1}x_{i_1} + b_{3i_2}x_{i_2} + b_{3i_3}x_{i_3} = c_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{mi_1}x_{i_1} + b_{mi_2}x_{i_2} + \cdots + b_{mi_m}x_{i_m} = c_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \quad (7)$$

Тогда системы (6) и (7) называются эквивалентными, если для любого натурального числа m взаимно эквивалентны и следующие системы:

$$\begin{cases} a_{1j_1}x_{j_1} = b_1 \\ a_{2j_1}x_{j_1} + a_{2j_2}x_{j_2} = b_2 \\ a_{3j_1}x_{j_1} + a_{3j_2}x_{j_2} + a_{3j_3}x_{j_3} = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{mj_1}x_{j_1} + a_{mj_2}x_{j_2} + \cdots + a_{mj_m}x_{j_m} = b_m \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} b_{1i_1}x_{i_1} = c_1 \\ b_{2i_1}x_{i_1} + b_{2i_2}x_{i_2} = c_2 \\ b_{3i_1}x_{i_1} + b_{3i_2}x_{i_2} + b_{3i_3}x_{i_3} = c_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{mi_1}x_{i_1} + b_{mi_2}x_{i_2} + \cdots + b_{mi_m}x_{i_m} = c_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{1i_1}x_{i_1} = c_1 \\ b_{2i_1}x_{i_1} + b_{2i_2}x_{i_2} = c_2 \\ b_{3i_1}x_{i_1} + b_{3i_2}x_{i_2} + b_{3i_3}x_{i_3} = c_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{mi_1}x_{i_1} + b_{mi_2}x_{i_2} + \cdots + b_{mi_m}x_{i_m} = c_m \end{cases}$$

Последовательность $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, ...$ называется решением системы (6), если для любого натурального числа m числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ являются решением системы (8). Поиск всех решений системы (6) называется решением этой системы. Ясно, что (6) все значения переменных системы можно найти последовательно сверху вниз. Ниже решается система некоторых бесконечноразмерных линейных уравнений.

Пример 1. Решите следующую систему бесконечно размерных линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2=1 \\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{m}x_1+\frac{1}{m}x_2+\cdots+\frac{1}{m}x_m=1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Решение. Основные и расширенные матрицы этой системы имеют следующий вид:

$$A_m=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\ddots&0\\ \frac{1}{m}&\frac{1}{m}&\frac{1}{m}&\cdots&\frac{1}{m}\end{pmatrix},$$

$$B_m=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&1\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&1\\ \cdots&\cdots&\cdots&\ddots&1\\ \frac{1}{m}&\frac{1}{m}&\frac{1}{m}&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

Тогда $x_1 = 1$,

$$x_m=det(B_m)/det(A_m)=1,\ m=2,3,4,\ldots.$$

бесконечная последовательность является решением данной системы.

Пример 2. Решите следующую систему бесконечных размерных линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1=1\\ \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=\frac{1}{3}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{m}x_1+\frac{1}{m}x_2+\cdots+\frac{1}{m}x_m=\frac{1}{m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Решение. Основными и расширенными матрицами этой системы являются:

$$A_m=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\ddots&0\\ \frac{1}{m}&\frac{1}{m}&\frac{1}{m}&\cdots&\frac{1}{m}\end{pmatrix},$$

$$B_m=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\vdots\\ \frac{1}{m}&\frac{1}{m}&\frac{1}{m}&\cdots&\frac{1}{m}\end{pmatrix}.$$

Тогда x1 = 1,

$$x_m=det(B_m)/det(A_m)=0,\ m=2,3,4,\ldots.$$

бесконечная последовательность является решением системы.

Как видно, существует взаимосвязь между системами бесконечномерных линейных уравнений и системами размерных линейных уравнений. Например, мы можем обосновать следующие общие гипотезы:

Гипотеза 1. Если система бесконечномерных линейных уравнений имеет единственное решение, то между этим решением и решениями системы размерных линейных уравнений с этой системой существует неразрывная связь.

Гипотеза 2. Если решение системы бесконечномерных линейных уравнений единственно и это решение является нулевым приближением, то это аналогично системе размерных линейных уравнений.

Гипотеза 3. Если последовательность (или сеть) определителей основных матриц системы размерных линейных уравнений, соответствующая данному бесконечно размерному линейному уравнению, имеет предел, то эта система безграничного линейного уравнения имеет единственное решение.

Список литературы:

1. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985. – 392 с.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1994. – С. 319
3. Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. – М.: Наука, 1987. – С. 352.
4. Краткий курс по математике / В.Е. Шнейдер и др. – Ташкент: Учитель, 1985. С. 407.
5. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970. – С. 400.
6. Сарымсаков Т.А. Курс функционального анализа. – Ташкент: Учитель, 1980. – С. 402.
7. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. – М.: ИЛ, 1968. – С. 322.