7universum.com
UNIVERSUM: ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Юденкова Анна Прохоровна
доцент, ФГБОУ ВПО «Смоленская ГСХА»,
214000, Россия, Смоленская область,
г. Смоленск, улица Большая Советская, дом 10/2
E-mail: aleks-ydenkov@mail.ru

Изотова Ольга Александровна
канд. физ.-мат .наук, ФГБОУ ВПО «Смоленская ГСХА»,
214000, Россия, Смоленская область,
г. Смоленск, улица Большая Советская, дом 10/2

ON THE STABILITY OF STOCHASTIC MATHEMATICAL MODELS OF MAJOR TASKS OF PLAIN STATISTICAL ELASTICITY THEORY

Anna Yudenkova
Associate Professor, FSBEI HPE “Smolensk State Agricultural Academy”,
214000, Russia, Smolensk region, Smolensk, Bolshaya Sovetskaya str., 10/2

Olga Izotova
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
FSBEI HPE “Smolensk State Agricultural Academy”,
214000, Russia, Smolensk region, Smolensk, Bolshaya Sovetskaya str., 10/2

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается вопрос об устойчивости математических моделей основных задач плоской статистической теории упругости в случае, когда нагрузка на тело носит случайный характер. Под моделями понимаются краевые задачи для бианалитических функций, которые, с одной стороны, обобщают задачи плоской теории для изотропных и анизотропных тел,

Юденкова А.П., Изотова О.А. Об устойчивости стохастических математических моделей основных задач плоской статистической теории упругости // Universum: Технические науки : электрон. научн. журн. 2015. № 11 (22) . URL: http://7universum.com/ru/tech/archive/item/2766

с другой стороны, совпадают в частных случаях с классическими задачами Римана и Гильберта для аналитических функций.

Актуальность темы обусловлена тем, что устойчивость модели позволяет применять к её исследованию приближённые численные методы. Это особенно важно при решении основных задач плоской теории упругости для изотропных и анизотропных тел, так как лишь немногие из таких задач могут быть решены в замкнутой форме.

К научной новизне работы относится расширение класса исследуемых краевых задач. В отличие от классической постановки устойчивость изучается для функций, сходящихся в среднем квадратическом.

Решение проводится с использованием методов математического моделирования и теории краевых задач для бианалитических функций. Основным результатом работы является доказательство устойчивости краевых задач для бианалитических функций в стохастической постановке в случае нулевого индекса.

ABSTRACT

The article deals with the question of mathematical models stability of the major tasks of the plane statistical elasticity theory in case when the load on the body is random. Under the model, boundary-value problems for bianalytical functions are considered which, on the one hand, summarize tasks of the plane theory for isotropic and anisotropic bodies, on the other hand, coincide in special cases with the classical tasks of Riemann and Hilbert for analytical functions.

Relevance of the topic is due to the fact that the model sustainability allows applying it to research of approximate numerical methods. It is particularly important in addressing the major problems of the plane elasticity theory for isotropic and anisotropic bodies, since only a few of these tasks can be solved in a closed form.

An extension of class study of boundary value problems refers to the scientific novelty of the work. In contrast to the classical formulation, stability is studied for functions that converge in mean square.

The solution is carried out using mathematical modeling methods and the theory of boundary value problems for bianalytical functions. The main work result is the proof of the stability of boundary value problems for bianalytical functions in a stochastic setting in case of the zero index.

Ключевые слова: основные задачи плоской теории упругости, случайная бианалитическая функция.

Keywords: major tasks of the plane elasticity theory; random bianalitical function.

Основные задачи теории упругости для изотропных и анизотропных тел эффективно решаются с использованием комплексного потенциала, который имеет вид бианалитической функции [3; 5; 8]

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\,\varphi_1(z)\,, \tag{1}$$

где: $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$ – аналитические функции.

Напомним, что существует две основные задачи плоской теории упругости, в которых требуется определить напряжения и смещения в любой точке внутри тела и на его поверхности.

Первая основная задача. Требуется определить упругое равновесие тела, когда на контуре L заданы внешние усилия X_n и Y_n. Граничные условия примут вид:

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = X_{n,}$$
$$\tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = Y_{n.} \tag{2}$$

Здесь n – внешняя нормаль к контуру L.

Вторая основная задача. Требуется определить упругое равновесие тела, когда на контуре L области D заданы перемещения. Граничные условия при этом можно записать так:

$$u = g_1(s), \;\; v = g_2(s), \tag{3}$$

где: $g_1(s)$ и $g_2(s)$ – заданные смещения точек контура L, представляющие собой заданные функции от дуги s контура, отсчитываемой от произвольной его точки.

Решение основных задач (1) и (2), как известно, можно свести к решению краевых задач для бианалитических функций [6]. Так, математическая модель первой основной задачи имеет вид:

$$\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t) = -\left[\overline{\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t)}\right] + g_1(t),$$

$$\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t) = \left[\overline{\varphi_0'(t) + \bar{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)}\right] + g_2(t), \quad t \in L, \qquad (4)$$

где: $g_k(t)$ $(k = 1, 2)$ - известные функции.

На основе математических моделей первой и второй основных задач теории упругости Ф.Д. Гаховым были поставлены краевые задачи для бианалитических функций и их обобщений [3]. В большинстве работ, посвящённых решению указанных задач, рассматривались детерминированные функции класса Гельдера [5; 6].

В последнее время появились работы, в которых краевые задачи для бианалитических функций рассматривались в стохастической постановке (смотри, например, [6–8]). Такие модели соответствуют случаю, когда нагрузки и контур тела являются случайными функциями.

В данной работе изучается вопрос устойчивости стохастических краевых задач для бианалитических функций. Устойчивость стохастических систем можно трактовать по-разному. Наиболее удобно работать с функциями, сходящимися в среднем квадратическом [4].

Напомним, что стохастическая система относительно невозмущенного сигнала называется устойчивой в среднем квадратическом, если математическое ожидание $M|\Delta y|^2$ сколь угодно мало при всех достаточно малых Δx (здесь x – входной сигнал, y – выходной сигнал, Δx – возмущение входного сигнала, Δy – возмущение выходного сигнала).

Согласно неравенству Чебышева класс систем, устойчивых в среднем квадратическом, является подклассом систем устойчивых по вероятности.

Приведём общую постановку краевой задачи в стохастической постановке для бианалитических функций на примере первой основной задачи (4).

Пусть контур L – стандартный (состоящий из конечного числа простых непересекающихся замкнутых кривых Ляпунова [3]) и ограничивающий на плоскости некоторую связную область D^+ (конечную или бесконечную), а коэффициенты уравнения (4) $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – случайные функции, удовлетворяющие условию Гельдера в среднем квадратическом [7].

Требуется определить неизвестную бианалитическую функцию F(z) (1).

В связи с тем, что в краевые условия (4) входит неаналитическая компонента $\bar{t}$, решение краевой задачи для бианалитической функции нельзя провести, используя теорию краевых задач для аналитических векторов. Поэтому искомая бианалитическая функция определяется покомпонентно.

Справедливо утверждение.

Теорема 1. Краевые задачи для бианалитических функций равносильны системе из двух соответствующих задач для аналитических функций, из которых одна является независимой.

Из теоремы 1 непосредственно следует утверждение.

Следствие 1. Решение краевой задачи для бианалитических функций сводится к последовательному решению двух краевых задач для аналитических функций.

Следствие 2. Решение краевой задачи для бианалитической функции выражается через конечное число интегралов типа Коши, ядра которых представляют собой функции, принадлежащие классу Гельдера в среднем квадратическом.

Пусть $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – краевые коэффициенты невозмущённой задачи (4). Краевым условиям возмущённой задачи соответствуют коэффициенты $g_1^*(t)$ и $g_2^*(t)$.

В силу следствия 1, получим

$$\int_l \frac{\varphi_0(t)-\varphi_0^*(t)}{\tau - t} d\tau \sim g_1(t) - g_1^*(t) = AM(|t-t^*|^2)\,. \qquad (5)$$

Здесь A – произвольная постоянная, M(*) – математическое ожидание.

Таким образом, справедлив результат.

Теорема 2. Краевая задача (4) в стохастической постановке устойчива в среднем квадратическом.

Аналогичные результат можно получить для других стохастических краевых задач на классе бианалитических функций в случае нулевого индекса. Если индекс задачи отличен от нуля, то возникают неустойчивые случаи, как и в классической теории краевых задач для детерминированных функций.

Список литературы:

1. Володченков А.М., Юденков А.В. Моделирование основных задач плоской теории упругости однородных анизотропных тел краевыми задачами со сдвигом // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2006. – № 3. – С. 482–484.
2. Володченков А.М., Юденков А.В. Об одном методе решения первой основной задачи теории упругости для однородного анизотропного тела // Universum: Технические науки : электрон. научн. журн. – 2015. – № 6 (18) / [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://7universum.com/ru/tech/archive/item/2247 (дата обращения: 10.11.2015).
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. Изотова О.А. Новый класс функций Гельдера в среднем квадратическом, обобщающий класс функций Гельдера на случай стохастических процессов // Обозрение прикладной и промышленной математики: материалы XI Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике. – 2010. – Вып. 17. – Т. 3. – С. 415–416.
5. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

6. Юденков А.В. Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. – Смоленск: «Смядынь», 2002. – 268 с.
7. Юденков А.В., Адигамов А.Э., Изотова О.А., Володченков А.М. Математические модели задач теории упругости для анизотропного тела на классе случайных функций // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2010. – № 1. – С. 75–79.
8. Юденков А.В., Романков А.В. Стохастическая задача Гильберта для бианалитических функций в изотропной теории упругости // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2012. – № 6. – С. 160–164.

References:

1. Volodchenkov A.M., Iudenkov A.V. Modeling of the main tasks of the plane elasticity theory of anisotropic bodies by inhomogeneous boundary value tasks with a shift. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*. [Review of applied and industrial mathematics], 2006, no. 3, pp. 482–484 (In Russian).
2. Volodchenkov A.M., Iudenkov A.V. On a method for solving the first major task of elasticity for a homogeneous anisotropic body. *Universum: Tekhnicheskie nauki : elektron. nauchn. zhurn. – 2015. – № 6 (18)*. [Universum: Technical Sciences: the electronic scientific journal. 2015, no. 6, (18)]. Available at: http://7universum.com/ru/tech/archive/item/2247 (accessed: 10 November 2015).
3. Gakhov F.D. Boundary tasks. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (In Russian).
4. Izotova O.A. A new class of Helder’s functions in the mean square summarizing Helder’s class of functions in the event of stochastic processes. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki: materialy XI Vserossiiskogo simpoziuma po prikladnoi i promyshlennoi matematike*. [Review of applied and industrial mathematics: materials of XI All-Russian Symposium on Applied and Industrial Mathematics], 2010, issue 17, vol. 3, pp. 415–416 (In Russian).

5. Muskhelishvili N.I. Some basic tasks of the mathematical theory of elasticity. Moscow, Nauka Publ., 1966. 707 p. (In Russian).
6. Iudenkov A.V. Boundary-value tasks with a shift for analytic functions and their application to issues of static elasticity theory. Smolensk, “Smiadyn'” Publ., 2002. 268 p. (In Russian).
7. Iudenkov A.V., Adigamov A.E., Izotova O.A., Volodchenkov A.M. Mathematical models of tasks in the theory of elasticity for an anisotropic body in the class of random functions. *Gornyi informatsionno-analiticheskii biulleten'*. [Mining informational and analytical bulletin], 2010, no. 1. pp. 75–79 (In Russian).
8. Iudenkov A.V., Romankov A.V. Stochastic Hilbert’s task for analytic functions in anisotropic elasticity theory. *Gornyi informatsionno-analiticheskii biulleten' (nauchno-tekhnicheskii zhurnal)*. [Mining informational and analytical bulletin (scientific and technical journal)], 2012, no. 6, pp. 160–164 (In Russian).